

Proper action の Bornology と粗幾何学による特徴づけ

広島大学大学院 先進理工系科学研究科 数学プログラム

長屋 拓暁 (Hiroaki NAGAYA) *

概要

群作用の商空間を考える際に proper という性質は重要である. Palais は適切な設定下で proper 作用は等長作用のケースしかないことを明らかにした. 本研究では, 今までトポロジーを用いて定義される proper 作用をボルノロジーを用いて定義する. 主結果として bornological proper 作用は粗空間に適切に作用するケースしかないことを明らかにした. これは Palais の結果の一般化になっている.

1 導入

この節では, L を局所コンパクトハウスドルフ群, X を局所コンパクトハウスドルフ空間, ρ を X 上の連続 L -作用とする. 任意の相対コンパクトな部分集合 $C, C' \subset X$ に対し, 集合

$$L_{C \rightarrow C'} := \{l \in L \mid lC \cap C' \neq \emptyset\}$$

が L において相対コンパクトであるとき, 作用 ρ は **proper** であるという. proper の定義に関する注意として, この定義の相対コンパクトの部分コンパクトに置き換えて proper を定義する流儀が多い. しかし今回の設定では同値であり, 本研究では応用の都合上こちらを採用する.

もし作用 ρ が proper ならば, 以下のような商空間に関する命題が得られる.

命題 1.1. 作用の proper 性について以下の命題が成り立つ.

1. L をハウスドルフ群, X をハウスドルフ空間とする. X への連続的な L -作用が proper ならば, 商空間 $L \backslash X$ もまたハウスドルフである.
2. L を局所コンパクトハウスドルフ群, X を完全正則空間とする. X への連続的な L -作用が proper ならば, 商空間 $L \backslash X$ もまた完全正則である.
3. L を離散群, X を局所コンパクトハウスドルフ空間とする. X への連続的な L -作用が proper かつ自由であるならば, $\pi: X \rightarrow L \backslash X$ は被覆写像である.

上記の命題の完全正則性について簡単に説明を加える. 距離空間の一般化として, 一様空間と呼ばれるものがある. これは位相の構造よりも強い概念で一様連続性や完備性を議論できる空間である. そして位相空間が一様化可能である必要十分条件が完全正則性である.

* E-mail: nagayahiroaki@hiroshima-u.ac.jp

このように群作用の商を考えるときに作用の proper 性は重要である。距離空間に等長に作用する場合、proper は以下のように特徴づけられることが知られている。

命題 1.2. (X, d) を Haine-borel な距離空間 (i.e. 有界閉集合であることとコンパクトであることが同値な距離空間) とする。また、 ρ を X 上等長な連続 L -作用とする。このとき、以下の 2 つの条件は同値である。

1. 作用 ρ は proper である。
2. 任意の点 $x \in X$ についてイソトロピー $L^x := \{l \in L \mid lx = x\}$ がコンパクトかつ軌道 $L \cdot x$ が X 上閉集合である。

しかし等長とは限らない一般の作用では、上記の命題の 2 を満たしていても proper になるとは限らない。下記がその例である。

例 1.3. $L := \mathbb{Z}, X := \mathbb{R}^2$ とおく。 X 上の L -作用 ρ を次のように定義する。

$$\begin{aligned} \rho: \mathbb{Z} \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) &\rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \\ (n, (x_1, x_2)) &\mapsto (2^n x_1, 2^{-n} x_2) \end{aligned}$$

この作用 ρ は自由な作用 (i.e. 任意の点でのイソトロピーは単位元のみ) である。また任意の点 $x \in X$ について軌道は閉集合である。しかしこの作用は proper ではない。実際コンパクト集合として円周 S^1 を考えたとき、 $\mathbb{Z}_{S^1 \rightarrow S^1} = \mathbb{Z}$ となり相対コンパクトとならない。

上記では等長でなく proper 作用でもない例を見たが、そもそも等長ではない proper 作用は存在するのだろうか。Palais は L を Lie 群、 X を C^∞ -多様体とした設定において、 C^∞ -級作用が proper になるには、等長に作用する場合しかないことを明らかにした。

定理 1.4 (Palais [5]). L を Lie 群とし、 X を C^∞ 級多様体とする。また ρ を C^∞ 級な proper 作用とする。このとき、 X 上に位相を保つ L -不変な Riemann 計量が存在する。

ここで、位相を保つとは距離から定まる位相が X に備わる元の位相と一致することを指す。また吉野氏は命題 1.2 の“等長な作用”という条件を一様空間論の観点から一般化した。一様空間とは距離空間から“連続”の概念を抽象化したものである。構造の強い順に距離空間、一様空間、位相となっており、一様空間から位相を誘導することができる。

定理 1.5 (Yoshino [8]). L を局所コンパクトハウスドルフ群、 $(X, \mathcal{U})$ を可分かつパラコンパクトで局所コンパクトハウスドルフな一様空間とする。 ρ を $(X, \mathcal{U})$ 上同程度連続 (i.e. $\forall U \in \mathcal{U}, \exists V \in \mathcal{U}$ s.t. $\forall g \in G, V_g := \{(gx, gy) \mid (x, y) \in V\} \subset U$) な L -作用とする。このとき以下は同値である。

- (i) 作用 ρ は proper である。
- (ii) 任意の点 $x \in X$ についてイソトロピー L^x がコンパクトかつ軌道 $L \cdot x$ が X 上閉集合である。

さらに、吉野氏は適切な設定化において、作用が proper になるには、同程度連続に作用する場合しかないことを明らかにした。

定理 1.6 (Yoshino [8]). L を局所コンパクトハウスドルフ群, X をパラコンパクトで局所コンパクトハウスドルフな空間とする. また, ρ を X 上の連続 L -作用で商空間 $L \backslash X$ もパラコンパクトになるものとする. このとき, ρ が proper ならば, X 上に位相を保つ一様構造 $\mathcal{U}$ が存在して作用 ρ が同程度連続になる.

ここで, 位相を保つとは一様構造から定まる位相が X に備わる元の位相と一致することを指す. これらのトポロジーや一様空間の研究をもとに本研究では proper 作用をボルノロジー (定義 2.1) や粗空間 (定義 2.4) の観点から考察する. トポロジーや一様空間が “連続” について考える概念に対して, ボルノロジーや粗空間は “有界” を扱う概念として導入された. また一様構造がトポロジーを誘導するように粗構造はボルノロジーを誘導する (命題 2.6).

まず本研究の成果の一つとして, bornological proper を以下のように導入した.

定義 1.7. $(L, \mathcal{B}_L)$ をボルノロジー群, $(X, \mathcal{B}_X)$ をボルノロジー空間, ρ を X 上の有界 L -作用とする. このとき, ρ が **bornological proper** であるとは, 任意の $B, B' \in \mathcal{B}_X$ に対して, $L_{B, B'} := \{l \in L \mid lB \cap B' \neq \emptyset\}$ が $\mathcal{B}_L$ の元であることをいう.

この bornological proper と proper 作用は適切な条件下で一致する (詳細は定理 2.12).

このようにボルノロジーの観点から proper 作用を定義したとき, 下記の問いが自然と浮かぶ.

問題 1.8. トポロジーの proper 作用における命題 1.2 と 定理 1.5 (同様に定理 1.4 と定理 1.6) に対応する bornological proper 作用における定理は何か?

平たくいうと, 適切な状況下での bornological proper 作用の特徴づけと, bornological proper 作用になるには, どのような作用しかあり得ないかを明らかにせよという問いである.

命題 1.2 および定理 1.5 に呼応する形で, 粗空間 (定義 2.4) に同程度制御 (定義 2.9) に作用する場合に以下の主結果が得られた.

定理 1.9 (N). $(L, \mathcal{B}_L)$ をボルノロジー群, $(X, \mathcal{E})$ を粗空間とする. また粗構造から定まるボルノロジー $\mathcal{B}_L$ を考える. 作用 ρ が $(X, \mathcal{B}_\mathcal{E})$ 上の L -有界作用であり, $(X, \mathcal{E})$ 上の同程度制御であるとする. このとき, 次の 2 つの条件は同値である.

- (i) 作用 ρ は B-proper である.
- (ii) 任意の $x \in X$ に対し, $L^x \in \mathcal{B}_L$ となり, $\iota_x^*(\mathcal{B}_X) = q_*^x(\mathcal{B}_L)$ である.

条件 (ii) の等号式に関しては, 定義 2.3 とその下部に詳細がある.

また定理 1.4 および定理 1.6 に呼応する形で, 以下の主結果が得られた.

定理 1.10 (N). $(L, \mathcal{B}_L)$ をボルノロジー群, $(X, \mathcal{B}_X)$ をボルノロジー空間とする. 作用 ρ が X 上の L -有界作用とする. 作用 ρ が bornological proper であるとき, X 上にボルノロジーを保つ粗構造 $\mathcal{E}$ が存在して, 作用 ρ が同程度制御となる.

ここで, ボルノロジーを保つとは粗構造から定まるボルノロジーが X に備わる元のボルノロジーと一致することを指す.

2 主定理

本稿を通じて、任意の集合 X に対し、その冪集合を $\mathcal{P}(X)$ と表す。

以下に本稿の流れを紹介する。節 2.1 では、ボルノロジー空間に関する基本的事項を紹介する。節 2.2 では、粗空間に関する基本的事項を紹介する。節 2.3 では、有界作用に関する基本的事項を紹介する。節 2.4 では、粗空間に作用に関するケースにおいて用語を定義する。節 2.5 では、ボルノロジーを用いて作用の proper 性を定義し、それが適切な設定下では位相の proper 性と同値になることを紹介する。最後に節 2.6 では、ボルノロジーにおける proper 性の特徴づけと proper 作用の適用範囲について主結果を述べる。

2.1 ボルノロジー空間

この節では、関数解析の分野から生まれたボルノロジーについて定義を紹介する。歴史的経緯については [4] を参照されたい。ボルノロジーはトポロジーと同様に、集合 X に対し、冪集合 $\mathcal{P}(X)$ の部分集合を用いて以下のように定義する。

定義 2.1 (ボルノロジー). X を集合, $\mathcal{B}$ を $\mathcal{P}(X)$ の部分集合とする. $\mathcal{B}$ が X 上の**ボルノロジー**であるとは, $\mathcal{B}$ が次の 3 つの条件を満たすことをいう。

- (i) $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = X$.
- (ii) 任意の $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ に対し, $B_1 \cup B_2 \in \mathcal{B}$.
- (iii) 任意の $B \in \mathcal{B}$ と任意の $B' \subset B$ について, $B' \in \mathcal{B}$.

X 上のボルノロジー $\mathcal{B}$ に対し, 組 $(X, \mathcal{B})$ を**ボルノロジー空間**と呼び, ボルノロジーの各要素 $B \in \mathcal{B}$ を**有界集合**という. 特にボルノロジー空間の有限部分集合はすべて有界である。

次に「ボルノロジー基底」の概念を紹介する。集合 X に対し, $\mathcal{D}$ が X の部分集合族であり, 次の 2 つの条件を満たすとき, $\mathcal{D}$ を X 上の**ボルノロジー基底**という。

- (i') $\bigcup_{D \in \mathcal{D}} D = X$.
- (ii') 任意の $D_1, D_2 \in \mathcal{D}$ に対し, $D_1 \cup D_2 \subset D$ となる $D \in \mathcal{D}$ が存在する。

ボルノロジー基底 $\mathcal{D}$ に対し, 集合 $\langle \mathcal{D} \rangle := \{S \subset X \mid \exists D \in \mathcal{D} \text{ such that } S \subset D\}$ はボルノロジーとなる。

例 2.2. 以下に 2 つのボルノロジーの例を示す。

- (i) (X, d) を距離空間とする。このとき, すべての有界部分集合の族 $\mathcal{B}_d(X)$ はボルノロジーである。これを**有界ボルノロジー**と呼ぶ。
- (ii) X をハウスドルフ空間とする。このとき, 相対コンパクトな部分集合全体の族 $\mathcal{B}_{\text{cpt}}(X)$ はボルノロジーを形成する。これを**コンパクトボルノロジー**と呼ぶ。

ボルノロジー空間の間の射について以下に定義する。

定義 2.3 (ボルノロジー空間の間の射). $(X, \mathcal{B}_X), (Y, \mathcal{B}_Y)$ をボルノロジー空間とする. $f: X \rightarrow Y$ が有界であるとは, 任意の $B \in \mathcal{B}_X$ に対し, $f(B) \in \mathcal{B}_Y$ となることである.

また, 集合からボルノロジー空間への単射 $\iota: S \rightarrow Y$ があるとき, ι が有界となるような定義域側の最大なボルノロジーを自然に誘導することができる. それを $\iota^* \mathcal{B}_Y := \{\iota^{-1}(D) \subset S \mid D \in \mathcal{B}_Y\}$ と書く. 逆にボルノロジー空間から集合への全射 $q: X \rightarrow T$ があるとき, q が有界となるように値域側に自然にボルノロジーを誘導することができる. それを $q^* \mathcal{B}_X := \{q(B) \subset T \mid B \in \mathcal{B}_X\}$ と書く.

2.2 粗空間

この節では, Roe によって考案された粗空間を紹介する (cf. [7]). 距離空間から“連続”の概念を抽象化したのが一様構造である. それに対して“有界”の概念を抽象化したのが粗構造である. 2.1 では, 本稿で必要なボルノロジーの基本的事項を紹介した. 実は粗空間とボルノロジーは, 異なる文脈から生まれた概念である. それを統合して Bunke と Engel が“bornological coarse space”という両者を兼ね備える概念を導入した ([2]).

定義 2.4 (粗空間). 集合 X と $P(X \times X)$ の部分集合 $\mathcal{E}$ の対 $(X, \mathcal{E})$ が粗空間であるとは, 次の 5 つの条件を満たすことをいう:

- (i) $\text{diag}(X) := \{(x, x) \mid x \in X\} \in \mathcal{E}$.
- (ii) 任意の $E \in \mathcal{E}$ について, $E^\top := \{(x', x) \mid (x, x') \in E\} \in \mathcal{E}$.
- (iii) 任意の $E_1, E_2 \in \mathcal{E}$ について,

$$E_1 \circ E_2 := \{(x, z) \in X \times X \mid \exists y \in X \text{ such that } (x, y) \in E_1 \text{ and } (y, z) \in E_2\} \in \mathcal{E}.$$

- (iv) 任意の $E_1, \dots, E_n \in \mathcal{E}$ について, $\bigcup_{i=1}^n E_i \in \mathcal{E}$.
- (v) 任意の $E \in \mathcal{E}$ と $E' \subset E$ に対し, $E' \in \mathcal{E}$.

上記の設定において $\mathcal{E}$ の各要素を**制御集合**と呼ぶ. 一様構造との違いが現れている条件が, (iv) である. 一様構造は近傍 (一様構造の元のこと) に対し, それより大きな集合は全て近傍になるという条件をもつ. それに対して (iv) の条件は, 粗構造は制御集合に対し, それより小さな集合は全て制御集合になることを主張している. ここから一様構造が連続を議論の対象にしているのに対し, 粗構造は有界を議論の対象にしていることがわかる.

各 $E \in \mathcal{E}$ および X の部分集合 T に対し, E -**近傍**を以下のように定義する:

$$E[T] := \{s \in X \mid \exists t \in T \text{ such that } (s, t) \in E\}.$$

$\mathcal{P}(X \times X)$ の部分集合 $\mathcal{C}$ が次の 4 つの条件を満たすとき, **粗構造の基底**と呼ぶ (cf. [3]).

- (i)' ある $E \in \mathcal{C}$ が存在して $\text{diag}(X) \subset E$.
- (ii)' 各 $E \in \mathcal{C}$ に対し, ある $E' \in \mathcal{C}$ が存在して $E^\top \subset E'$.
- (iii)' 各 $E_1, E_2 \in \mathcal{C}$ に対し, ある $E' \in \mathcal{C}$ が存在して $E_1 \circ E_2 \subset E'$.
- (iv)' 各 $E_1, E_2 \in \mathcal{C}$ に対し, ある $E' \in \mathcal{C}$ が存在して $E_1 \cup E_2 \subset E'$.

粗構造の基底 $\mathcal{C}$ を持つとき, 次のように粗構造が定義される.

$$\langle \mathcal{C} \rangle := \{E \subset X \times X \mid \exists C \in \mathcal{C} \text{ such that } E \subset C\}.$$

例 2.5. (X, d) を距離空間とし, 任意の $r \geq 0$ に対し, 集合

$$E_r := \{(x, y) \in X \times X \mid d(x, y) \leq r\}$$

を定義する. このとき, 族 $\mathcal{C}_d := \{E_r \subset X \times X \mid r \geq 0\}$ は粗構造の基底である. 集合 $\mathcal{E}_d := \langle \mathcal{C}_d \rangle$ を**有界粗構造**と呼ぶ.

以下のように粗空間からボルノロジーを誘導することができる.

命題 2.6. $(X, \mathcal{E})$ を粗空間とする. このとき,

$$\mathcal{B}_{\mathcal{E}} := \{\cup_{i=1}^n E_i[p_i] \mid n \in \mathbb{N}, \{E_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{E}, \{p_i\}_{i=1}^n \subset X\} \cup \{\emptyset\}$$

は X 上のボルノロジーとなる.

2.3 ボルノロジー空間への群作用

位相群は, 群と位相を兼ね備えたものであり, リー群などもその一例である. 位相群の定義は群演算が連続であることを要請した. それと同様にボルノロジー群は群演算が有界 (定義 2.3) であることを要請する.

この節では, $(X, \mathcal{B}_X)$ をボルノロジー空間 (定義 2.1), L をボルノロジー $\mathcal{B}_L$ を備えた群, ρ を X 上の L -作用とする.

定義 2.7 (ボルノロジー群, cf. [6]). 群 L が**ボルノロジー群**であるとは, 積

$$L \times L \rightarrow L, \quad (l_1, l_2) \mapsto l_1 l_2$$

および逆元をとる写像

$$L \rightarrow L, \quad l \mapsto l^{-1}$$

がともに有界である場合であることをいう. ここで, $L \times L$ には $\langle \mathcal{B}_L \times \mathcal{B}_L \rangle$ が備えられている. ボルノロジーの集合としての直積は一般にボルノロジーにはならないが, ボルノロジー基底にはなる.

位相群に連続作用を定義することに呼応する形で, ボルノロジー群に有界作用を以下で定義する.

定義 2.8 (有界作用). L の X 上の作用 ρ が**有界作用**であるとは, 次の写像が有界であるときである:

$$L \times X \rightarrow X, \quad (l, x) \mapsto lx$$

ここで, $L \times X$ には $\langle \mathcal{B}_L \times \mathcal{B}_X \rangle$ が備えられている.

2.4 粗空間への群作用

この節では, [1] によって導入された粗空間上の同程度制御な群作用の定義を紹介する. L を群, X を集合, ρ を X 上の L -作用とする. 各 $l \in L$, $X \times X$ の部分集合 E に対し, 次の 2 つの記法を使用する:

$$E_l := \{(lx, ly) \mid (x, y) \in E\}$$

$$E_L := \bigcup_{l \in L} E_l.$$

距離空間 (より一般に一様空間) では, 写像の族に対して “同程度連続” と呼ばれる概念がある. 特に空間に群作用が備わっているとき, その群自体を自己同型写像の族と見ることができる. その族が同程度連続であるとき, 作用が同程度連続であるという. この定義は距離空間だけではなく, 一様空間に一般化することができる. その “有界” 版の対応物として同程度制御という概念を以下で定義する.

定義 2.9. $(X, \mathcal{E})$ を粗空間, L を群とする. L の作用 ρ が**同程度制御**であるとは, 各 $E \in \mathcal{E}$ に対し, ある $F \in \mathcal{E}$ が存在し, 任意の $l \in L$ に対し $E_l \subset F$ となることをいう.

上記の定義は, E_L が各 $E \in \mathcal{E}$ に対し制御集合であることを意味する. また, $E, F \in \mathcal{E}$ の要素が $E_l \subset F$ を満たす場合, 任意の点 $x \in X$ に対し $l \cdot (E[x]) \subset F[lx]$ が成り立つ.

例 2.10. (X, d) を距離空間とし, L を等長変換群の部分群とする. このとき, L は $(X, \mathcal{E}_d)$ に同程度制御に作用している.

すなわち, 同程度連続は等長作用の一般化である.

2.5 ボルノロジー的 Proper 性と位相的 Proper 性との関連

この節では, $(L, \mathcal{B}_L)$ をボルノロジー群, $(X, \mathcal{B}_X)$ をボルノロジー空間, ρ を X 上の有界な L -作用とする (順に定義 2.7, 2.1, 2.8 を参照).

定義 2.11. 作用 ρ が **bornological proper** (以降 B-proper と略記) であるとは, 任意の $B, B' \in \mathcal{B}_X$ に対し, $L_{B \rightarrow B'}$ が $\mathcal{B}_L$ に属することをいう.

このようにボルノロジー的に定義した作用の proper 性と位相的に定義した作用の proper 性にはどのような関係性があるだろうか. 実は L や X に適切な設定を定め, コンパクトボルノロジー (例 2.2) を考えると 2 つの proper 作用は同値になる.

定理 2.12. L を局所コンパクトハウスドルフ群, X を連続的な L -作用を備えた局所コンパクトハウスドルフ空間とする. また, それぞれにコンパクトボルノロジー $(L, \mathcal{B}_{\text{cpt}}(L))$ および $(X, \mathcal{B}_{\text{cpt}}(X))$ を考える. このとき, X 上の L -作用が proper であることと, B-proper であることは同値である.

2.6 bornological proper の特徴づけ

この節では、作用の B-proper 性 (定義 2.11) を特徴付ける. $(L, \mathcal{B}_L)$ をボルノロジー群 (定義 2.7), $(X, \mathcal{B}_X)$ をボルノロジー空間 (定義 2.1), ρ を X 上の有界な L -作用 (定義 2.8) とする. また各点 $x \in X$ に対して, ι_x を軌道 $L \cdot x$ から X への包含写像とし, 写像 q^x を以下のように定義する:

$$q^x: L \rightarrow L \cdot x, l \mapsto lx.$$

このとき, 粗空間 (定義 2.4) に同程度制御 (定義 2.9) に作用している設定下では, B-proper は以下のように特徴づけられる. これはイントロダクションで紹介した定理 1.9 のことである.

定理 2.13 (N). $(L, \mathcal{B}_L)$ をボルノロジー群, $(X, \mathcal{E})$ を粗空間とする. また粗構造から定まるボルノロジー $\mathcal{B}_L$ を考える. 作用 ρ が $(X, \mathcal{B}_\mathcal{E})$ 上の L -有界作用であり, $(X, \mathcal{E})$ 上の同程度制御であるとする. このとき, 次の 2 つの条件は同値である.

- (i) 作用 ρ は B-proper である.
- (ii) 任意の $x \in X$ に対し, $L^x \in \mathcal{B}_L$ となり, $\iota_x^*(\mathcal{B}_X) = q_*^x(\mathcal{B}_L)$ である.

上記の, $L^x := \{l \in L \mid lx = x\}$ はイソトロピーのことであり, 軌道上の 2 つのボルノロジー $\iota_x^*(\mathcal{B}_X), q_*^x(\mathcal{B}_L)$ については定義 2.3 とその下部分を参照されたい. 適切な設定化では, $L^x \in \mathcal{B}_L$ という条件がイソトロピーが相対コンパクトであるという条件と一致する (詳しくは定理 2.12 を参照されたい). また詳細の説明は省くが, 適切な設定化では任意の点 $x \in X$ に対して, $\iota_x^*(\mathcal{B}_X) = q_*^x(\mathcal{B}_L)$ が成り立つことと任意の軌道が閉集合であるということは同値である. 注意として一般に有界作用が B-proper でないでも $q_*^x \mathcal{B}_L \subset \iota_x^* \mathcal{B}_X$ は成り立つ.

イントロダクションでは Palais の結果として, C^∞ -級の設定において proper 作用は等長作用のケースに限ることを紹介した (定理 1.4). また吉野はより一般の設定において proper 作用は一様空間に同程度連続に作用するケースに限ることを示した (定理 1.6). これらの定理の“粗空間版”として B-proper 作用は粗空間に同程度制御に作用するケースしかないことが明らかになった. これはイントロダクションで紹介した定理 1.10 である.

定理 2.14 (N). $(L, \mathcal{B}_L)$ をボルノロジー群, $(X, \mathcal{B}_X)$ をボルノロジー空間, ρ を $(X, \mathcal{B}_X)$ 上の L -有界作用とする. ρ が B-proper ならば, あるボルノロジーを保つ粗構造 $\mathcal{E}$ が存在して, ρ は同程度制御になる.

定理 2.14 と定理 2.12 によって以下の系が直ちに導かれる.

系 2.15 (N). $(L, \mathcal{B}_L)$ を局所コンパクトハウスドルフ群, $(X, \mathcal{B}_X)$ を局所コンパクトハウスドルフ空間とし, ρ を X 上の L -連続作用とする. ρ が proper ならば, ある粗構造 $\mathcal{E}$ が存在して, 誘導するボルノロジーが X 上のコンパクトボルノロジーと一致し, 作用 ρ は同程度制御になる.

すなわち, 本研究により proper 作用には粗構造が定まることが明らかとなった.

参考文献

- [1] Nikolay Brodskiy, Jerzy Dydak, and Atish Jyoti Mitra, *Coarse structures and group actions*, Colloq. Math. **111** (2008), no. 1, 149–158. MR 2353938
- [2] Ulrich Bunke and Alexander Engel, *Homotopy theory with bornological coarse spaces*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 2269, Springer, Cham, [2020] ©2020. MR 4176662
- [3] Dikran Dikranjan and Nicolò Zava, *Categories of coarse groups: quasi-homomorphisms and functorial coarse structures*, Topology Appl. **273** (2020), 106980, 31. MR 4074764
- [4] Henri Hogbe-Nlend, *Les racines historiques de la bornologie moderne*, Actes du Colloque d'Analyse Fonctionnelle (Univ. Bordeaux, Bordeaux, 1971), Supplément au Bull. Soc. Math. France, vol. Tome 100, Soc. Math. France, Paris, 1972, pp. 201–206. MR 355511
- [5] Richard S. Palais, *On the existence of slices for actions of non-compact Lie groups*, Ann. of Math. (2) **73** (1961), 295–323. MR 126506
- [6] Dinamérico P. Pombo, Jr., *Bornological groups*, Indian J. Math. **54** (2012), no. 2, 225–258. MR 3013350
- [7] John Roe, *Lectures on coarse geometry*, University Lecture Series, vol. 31, American Mathematical Society, Providence, RI, 2003. MR 2007488
- [8] 吉野 太郎, 固有な作用の一樣連続性について, 表現論シンポジウム講演集 **2006** (2006), 22–30.